Дәріс 2
Математикалық физиканың негізгі теңдеулері: Шектің тербеліс теңдеуін қорытып шығару

Механиканың (тор, стержнь, мембрана) физиканың (электромагнит тербелістер) көп мәселелері

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=div(pgradu)-qu+F(x,t) \qquad (1)$$

көріністегі тербеліс теңдеулеріне алып келінеді. Мұндағы u(x,t) белгісіз функция n кеңістік координаталарына және де t уақытқа байланысты. F(x,t) сыртқы әрекеттің интенсивтігін анықтайды. (1) теңдеуде қатысып отырған div және grad операторлар анықтамасы негізінде

$$div(gradu)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Ішектің тербеліс теңдеуін келтіріп шығару үшін Даламбер принціпінен пайдаланамыз. Бұған негізінен ішектің ажыратылған бөліміне әсер етуші барлық күштердің жиындысы нолге тең болуы керек.Бірлік ұзындықта есептелген және ішекке Ou оққа параллель әсер ететін сыртқы күш $p(x,t)$ болсын.

M_1M_2 бөліміне әсер ететін күш

$$\int_{x_1}^{x_2}p(x,t)dx$$

ке тең болады.

x_2 нүктедегі көлбеудің Ou дегі проекциясы $T_0\sin\alpha\,(x_2)$ ге, ал x_1 нүкедегі - $T_0\sin\alpha\,(x_1)$ ке тең болады. Осы

$$\sin\alpha(x)=\frac{tg\alpha(x)}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}}=\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx u_x$$

формула негізінде

$$T_0\sin\alpha\,(x_2)-T_0\sin\alpha\,(x_1)=T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right]=T_0\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

теңдікке ие боламыз. Ішектің кішкене бөлегі массасының оның ұзындығына болған қатынасының лимиті, p(x) болсын.

M нүкте жылдамдығы $\frac{\partial u}{\partial t}$, лездік жылдамдығы $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ болғаны үшін M_1M_2 бөлектің инерция күші

$$-\int_{x_1}^{x_2}p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx$$

ке тең болады. Даламбер принціпі негізінде

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(x,t)-p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dx=0$$

теңдікке ие боламыз. x_1 және x_2 лер қалауымызша алынғаны үшін

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+p(x,t)-p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad (2)$$

Ал бұл ішектің көлденең (вертикаль) тербелісі теңдеуі.

Егер p(x) тұрақты болса, p(x) = p, ішектің тербеліс теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{3}$$

көрінісінде жазылады. Мұнда $a^2 = \frac{T_0}{p}$, $f(x,t) = \frac{p(x,t)}{p}$. (3) теңдеу әдетте бір өлшемді толқын теңдеуі деп те аталады. Ішекке әсер ететін сыртқы күш $p(x,t) = 0$ болса, онда ішектің еркін тербеліс теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

келіп шығады.

(1) көріністегі

$$pS \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x,t)$$

теңдеу иілуші стерженнің кіші бойлама тербелісін де өрнектейді. Мұнда S(x) – стерженнің көлденең қимасының беті, E(x) – x нүктедегі Юнг модулі.

Дәл ішектің тербеліс теңдеуіне ұқсас мембрананың көлденең тербелісінің теңдеуі келтіріп шығарылады:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + p(x_1, x_2, t)$$

Егер $\rho = const$ болса, мембрана тербеліс теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F(x_1, x_2, t), \quad a^2 = \frac{T_0}{p}, \qquad F = \frac{p}{\rho} \tag{5}$$

екі өлшемді толқын теңдеуі делінеді. Үш өлшемді толқын теңдеуі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + F(x_1, x_2, x_3, t) \tag{6}$$